Solitaire nach Conway – Lösung

Nach Prof. Dr. Lehn, Universität Mainz

q^4	q^3	q^2	q	**1**	q	q^2	q^3	q^4
q^5	q^4	q^3	q^2	q	q^2	q^3	q^4	q^5
q^6	q^5	q^4	q^3	q^2	q^3	q^4	q^5	q^6
q^7	q^6	q^5	q^4	q^3	q^4	q^5	q^6	q^7
q^8	q^7	q^6	q^5	q^4	q^5	q^6	q^7	q^8

Tabelle 1

Die besetzten Felder des Anfangsspielbretts werden gemäß Tabelle 1 bewertet. Im Verlauf des Spieles werden die frei gewordenen Felder mit 0 belegt, in der „oberen Hälfte" werden die Folgen von unten nach oben fortgesetzt, wobei auch Einträge mit negativen Exponentenentstehen (vgl. Tabelle 2)

Die Konstante q ergibt sich aus der Forderung, dass bei Bewegung eines Spielsteins nach rechts oder oben die Bewertung insgesamt gleich bleibt. Bei einem Spielzug, der zu Tabelle 2 führt, müssen die Bewertungen der frei gewordenen Felder in der „unteren Hälfte" gleich der Bewertung des neuen Feldes sein:

$$q^{-1} = 1 + q$$

Eine positive Lösung dieser Gleichung lautet:

$$\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} \text{ (Goldener Schnitt)}$$

				q^{-1}				
q^4	q^3	q^2	q		q	q^2	q^3	q^4
q^5	q^4	q^3	q^2		q^2	q^3	q^4	q^5
q^6	q^5	q^4	q^3	q^2	q^3	q^4	q^5	q^6
q^7	q^6	q^5	q^4	q^3	q^4	q^5	q^6	q^7
q^8	q^7	q^6	q^5	q^4	q^5	q^6	q^7	q^8

Tabelle 2

Somit bleibt in Tabelle 2 die Gesamtbewertung (Summe aller Einträge) gleich gegenüber der Bewertung in Tabelle 1. Diese ist eine Invariante des Spieles.

Die Gesamtbewertung lässt sich aus Tabelle 1 leicht ermitteln, wenn man beachtet, dass jede Zeile sich aus unendlichen geometrischen Reihen berechnen lässt. Nummeriert man die Reihen der „unteren Hälfte" mit 0 beginnend nach unten durch, so erhält man als Summe in Zeile i ($i \in N_0$):

$$S_i = \quad q^i\left(2\sum_{k=1}^{\infty}\left(q^k\right)+1\right) = q^i\left(\sqrt{5}+2\right)$$

Die Summe über alle Einträge in Tabelle 1 ergibt sich aus

$$S_{ges} = \sum_{i=0}^{\infty} S_i = \left(\sqrt{5}+2\right)\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{5}{2}\sqrt{5}+\frac{11}{2}$$

Gemäß Aufgabenstellung ist es Ziel, in der „oberen Hälfte“ genau einen Spielstein möglichst weit „oben“ durch erlaubte Operationen zu platzieren (vgl.

http://www.mohr-netz.de/Mathematik/SolitaireConway/solitaireconway.html

O. b. d. A. ist also ein Spielstein in der k. Zeile oberhalb des mit 1 bewerteten Feldes zu platzieren, wobei k maximal sein soll.

Folglich setzt sich die Summe $S_{ges} = \frac{5}{2}\sqrt{5}+\frac{11}{2}$ zusammen aus q^{-k} und der Summe S aller Bewertungen der „unten“ noch besetzten Felder.

Wegen der Invarianz der Gesamtbewertung gilt also

$$q^{-k} + S = S_{ges}$$

Da S > 0, ist $q^{-k} \le S_{ges}$.

$\left(q^{-k}\right)_k$ ist eine streng monoton wachsende Zahlenfolge, die nach oben unbeschränkt ist. Man rechnet leicht nach, dass $q^{-5} = S_{ges}$. Wenn k = 5 möglich wäre müsste also die ganze untere Hälfte geleert werden, um in der 5. Zeile oberhalb der „unteren Hälfte“ einen Stein zu setzen. Das ist in endlich vielen Schritten nicht möglich.

Folglich kann das maximale k höchstens 4 sein. Durch Probieren stellt man fest, dass dies auch möglich ist.